MATRIZENRECHNUNG

Übergangsmatrizen 2

Themenheft:

Diffusionsmodell

im Zusammenhang mit einer Abbildung, welche der Übergangsmatrix entspricht.

Verwendung von Eigenvektoren mit vielen Erklärungen und Tipps.

Datei 62333

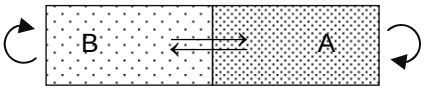
Friedrich Buckel

Stand: 11. November 2012

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort



Ein Beispiel für eine Anwendung der Übergangsmatrizen sind die Zustandsänderungen, die bei der Diffusion von Molekülen aus zwei benachbarten Kammern entstehen.

Die Übergangsmatrix ist in diesem Fall vom Typ $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Matrizen dieser Art dienen auch dazu, in der x-y-Ebene geometrische Punktabbildungen zu beschreiben. Hier wird gezeigt, welchen Bezug eine solche Abbildung α zum Diffusionsprozess hat. Die Punkte, die man aus den Zustands- oder Verteilungsvektoren bilden kann, liegen nämlich auf einer Fixgeraden g der zu U gehörenden Abbildung α. Diese Abbildung hat ferner eine Achse (Fixpunktgerade). Und weil der Grenzzustand des Diffusionsprozesses ein stationärer Vektor ist, wird der zugehörige Grenzpunkt G ein Fixpunkt von α, und damit ist G der Schnittpunkt der Fixgeraden g mit der Achse a von α.

Man erkennt daran, dass die Punktfolge der Verteilungszustände, die man auf g darstellen kann, nur ein kleiner Aspekt ist von dem, was die Abbildung α leistet. Diese Punkte ist nichts anderes als eine Folge von Punktabbildungen, die hier eine schräge Achsenstreckung ist.

Berechnet man zu U die beiden **Eigenvektoren** samt ihren **Eigenwerten**, dann kann man auf einfache Art Achse und Fixgeraden von α festlegen und dies schnell auf den Diffusionsprozess übertragen. Änderungen in der Versuchsanordnung (bei gleicher Matrix U) sind dann schnell erledigt und bedürfen keiner großen Rechnungen mehr.

Man erkennt, dass eine gewisse Grundkenntnis zur Theorie der Abbildungen hier verlangt wird.

Dennoch zeigt dieser Text auch Abbildungs-Unkundigen, was hinter diesen Abbildungen und den Eigenvektoren steckt.

Ein wichtiger Abschnitt des Textes zeigt, wie man eine solche Übergangsmatrix U für eine neue Aufgabe erstellen kann, so dass vorgegebene Eigenschaften (Eigenwerte und Eigenvektoren usw.) als Ergebnisse möglich werden.

Hinweis 1:

Es gibt auch einen eigenen Text (62300) zu Eigenwerten und Eigenvektoren, der nach einem kurzen Ausflug in die Abbildungsgeometrie auf die Theorie der Mehrstufigen Prozesse zugeschnitten ist:

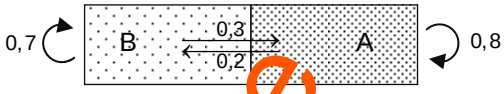
Hinweis 2:

Die Grafiken wurden mit MatheGrafix Version 10 erstellt und liegen auf der CD im Ordner Mathegrafiken im Zip-Archiv mgf-62333.zip. Wer die Version 10 hat (erscheint Januar 2013), kann sie weiter bearbeiten bzw. herausfinden, wie man sie erstellt.

Inhalt

1 Diffusionsmodell

Diffusion ist eine durch thermische Bewegung verursachte Verteilung der Moleküle eines Stoffes in einem anderen. Die Abbildung zeigt ein vereinfachtes Modell einer Diffusion.



Der mit einer durchlässigen Trennwand zweigeteilte Kasten ist mit Molekülen gefüllt.

Die Verteilung der Moleküle auf die beiden Hälften A und B ändert sich (in diesem Beispiel) jeweils nach Ablauf einer bestimmten Zeitspanne so, dass 20% der Moleküle in A nach B diffundieren und 30% der Moleküle aus B nach A diffundieren.

Dies kann man als Übergangstabelle so darstellen:

	A	B
A	0,8	0,3
B	0,2	0,7

Oder als Übergangsmatrix: $U = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

Will man diesen Diffusionsprozess mathematisch simulieren (modellieren), benötigt man einen Anfangszustand (Startvektor $\vec{v}_0$, Anfangsverteilung).

Ich verwende $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 5000 \\ 10000 \end{pmatrix}$, d.h. zu Beginn der Beobachtung befinden sich

$x_0 = 5000$ Moleküle in A und

$y_0 = 10000$ Moleküle in B.

Die Gesamtzahl ist also immer konstant 15000 !! $x_n + y_n = 15.000$

Sie ändert sich auch im Laufe der Diffusion nicht mehr.

Der Zustandsvektor nach der n-ten Zeitspanne wird mit $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ bezeichnet.

Berechnung der Zustandsvektoren (Verteilungsvektoren):

Gemäß der Rechnung mit der Übergangsmatrix erfolgt dies zunächst ***rekursiv***:

$$\vec{v}_n = U \cdot \vec{v}_{n-1}, \text{ also } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot x_{n-1} + 0{,}3 \cdot y_{n-1} \\ 0{,}2 \cdot x_{n-1} + 0{,}7 \cdot y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Rekursive Berechnungen sind ungünstig, denn z. B. für $\vec{v}_{20}$ müssen dann zuerst die Vektoren $\vec{v}_1$ bis $\vec{v}_{19}$ berechnet worden sein, damit daraus dann $\vec{v}_{20} = U \cdot \vec{v}_{19}$ folgt.

Also erstellt man eine ***explizite Berechnungsformel.***

Dies geschieht durch sukzessives Einsetzen der Formeln ineinander:

Aus $\vec{v}_1 = U \cdot \vec{v}_0$ und $\vec{v}_2 = U \cdot \vec{v}_1$ folgt $\vec{v}_2 = U \cdot (U \cdot \vec{v}_0) = U^2 \cdot \vec{v}_0$ usw.

So erhält man die Formel $\vec{v}_n = U^n \cdot \vec{v}_0$.

Es gibt jedoch noch eine ganz andere Methode, die auf den folgenden Seiten dargelegt wird.

Sie eignet sich gut zur Berechnung der Grenzverteilung nach langer Diffusion.

(1) Rekursive Berechnung der nächsten vier Molekularverteilungen:

$$\vec{v}_1 = U \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5000 \\ 10000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4000+3000 \\ 1000+7000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7000 \\ 8000 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = U \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7000 \\ 8000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5600+2400 \\ 1400+5600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8000 \\ 7000 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_3 = U \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8000 \\ 7000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6400+2100 \\ 1600+4900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8500 \\ 6500 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_4 = U \cdot \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8500 \\ 6500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6800+1950 \\ 1700+4550 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8750 \\ 6250 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Grenzverteilung

Allgemein gilt: $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = U \cdot \vec{v}_{n-1} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot x_{n-1} + 0{,}3 \cdot y_{n-1} \\ 0{,}2 \cdot x_{n-1} + 0{,}7 \cdot y_{n-1} \end{pmatrix}$

Diese beiden Rekursionsformeln für die Zahlenfolgen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ haben den Nachteil, dass man zur Berechnung von x_n auf y_n-Werte zugreifen muss und umgekehrt. Dies kann man jedoch ändern, denn es gibt ja die für alle Zeitpunkte (also n) gültige Zusatzbedingung $x_n + y_n = 15000$.

Damit kann man die beiden Berechnungsgleichungen entscheidend vereinfachen:

In der Gleichung $x_n = 0{,}8 \cdot x_{n-1} + 0{,}3 \cdot y_{n-1}$ wird $y_{n-1} = 15000 - x_{n-1}$ eingesetzt:

$x_n = 0{,}8 \cdot x_{n-1} + 0{,}3 \cdot (15000 - x_{n-1})$

Also folgt: $x_n = 0{,}5 \cdot x_{n-1} + 4500$ (1)

Und in $y_n = 0{,}2 \cdot x_{n-1} + 0{,}7 \cdot y_{n-1}$ wird $x_{n-1} = 15000 - y_{n-1}$ eingesetzt:

$y_n = 0{,}2 \cdot (15000 - y_{n-1}) + 0{,}7 \cdot y_{n-1}$

Also folgt: $y_n = 0{,}5 \cdot y_{n-1} + 3000$ (2)

Hieraus kann man die **Grenzwerte der beiden Folgen** ermitteln, also den **Endzustand der Verteilung** nach hinreichend langer Zeit:

Wenn die Folge x_n konvergiert, dann gilt sowohl $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_G$, wie auch $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1} = x_G$.

Lässt man in (2) $n \to \infty$ gehen, folgt:

$x_G = 0{,}5 \cdot x_G + 4500$

$0{,}5 \cdot x_G = 4500$

$x_G = 9000$

Analog folgt für die Folge y_n aus (3):

$y_G = 0{,}5 \cdot x_G + 3000$

$0{,}5 \cdot y_G = 3000$

$y_G = 6000$.

Letzteres hätte man durch $y_G = 15000 - x_G$ einfacher haben können.

Ergebnis: Langfristig entwickelt sich eine Grenzverteilung, die hier $\vec{v}_G = \begin{pmatrix} 9000 \\ 5000 \end{pmatrix}$ ist.

Ist dieser Zustand erreicht, ändert sich die Verteilung nicht mehr.

Dies ist ein stabiler Zustand.

(2) Explizite Berechnung der Zustandsänderungen und Grenzverteilung:

1. Möglichkeit: Rechnen mit Matrizenpotenzen

Aus $\vec{v}_1 = U \cdot \vec{v}_0$

und $\vec{v}_2 = U \cdot \vec{v}_1$ folgt $\vec{v}_2 = U^2 \cdot \vec{v}_0$

Aus $\vec{v}_3 = U \cdot \vec{v}_2$ folgt $\vec{v}_3 = U^2 \cdot \vec{v}_0$

Allgemein: $\vec{v}_n = U^n \cdot \vec{v}_0$

Define $u=\begin{bmatrix}0.8 & 0.3\\0.2 & 0.7\end{bmatrix}$	*Fertig*
Define $v0=\begin{bmatrix}5000\\10000\end{bmatrix}$	*Fertig*
$v1=u\cdot v0$	$v1=\begin{bmatrix}7000.\\8000.\end{bmatrix}$
$v2=u^2\cdot v0$	$v2=\begin{bmatrix}8000.\\7000.\end{bmatrix}$
$v3=u^3\cdot v0$	$v3=\begin{bmatrix}8500.\\6500.\end{bmatrix}$
$v4=u^4\cdot v0$	$v4=\begin{bmatrix}8750.\\6250.\end{bmatrix}$
$v10=u^{10}\cdot v0$	$v10=\begin{bmatrix}8996.09\\6003.91\end{bmatrix}$
$v20=u^{20}\cdot v0$	$v20=\begin{bmatrix}9000.\\6000.\end{bmatrix}$
$v21=u^{21}\cdot v0$	$v21=\begin{bmatrix}9000.\\6000.\end{bmatrix}$

Nebenstehender Screenshot zeigt, dass z. B. der Übergang von $\vec{v}_{20}$ zu $\vec{v}_{21}$ keine Verteilungsänderung mehr bringt.

Diese findet mathematisch sicher noch in den Nachkommastellen statt. Doch hier stößt das Modell an seine Grenzen, denn Moleküle teilen sich bei Diffusion nicht, also sind x_n und y_n ganzzahlig.

Wir haben also (spätestens) nach der 20. Zeiteinheit einen stabilen Endzustand erreicht. Und dieser stimmt, wie man sieht, mit dem zuvor berechneten Grenzzustand überein, der also nicht erst für $n \to \infty$ erreicht wird!

2. Möglichkeit: Umwandlung der rekursiven Folgenberechnung in eine explizite Folgenberechnung (exponentielle Wachstumsfolge).

Die beiden rekursiv definierten Folgen

$$x_n = 0{,}8 \cdot x_{n-1} + 0{,}3 \cdot y_{n-1}$$
$$y_n = 0{,}2 \cdot x_{n-1} + 0{,}7 \cdot y_{n-1}$$

lassen sich in die Form $x_n = a \cdot b^n + c$ (bzw. $y_n = \ldots$) bringen.

Dies geschieht mit dem Ansatz: $x_n = a \cdot b^n + c$

Zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c benötigt man $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix}5000\\10000\end{pmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}7000\\8000\end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}8000\\7000\end{pmatrix}$.

Einsetzen von $x_0 = 5000$	$5000 = a \cdot \cancel{b^0} + c$	(3)
Einsetzen von $x_1 = 7000$	$7000 = a \cdot b^1 + c$	(4)
Einsetzen von $x_3 = 8000$	$8000 = a \cdot b^2 + c$	(5)
Elimination von c: (5) − (4):	$1000 = ab^2 - ab = ab(b-1)$	(6)
(4) − (3):	$2000 = ab - a = a(b-1)$	(7)
Elimination von a: $\frac{(6)}{(7)}$!!!:	$\frac{1000}{2000} = \frac{ab(b-1)}{a(b-1)} \Leftrightarrow b = 0{,}5$	
Einsetzen in (7):	$2000 = a \cdot (-0{,}5) \Leftrightarrow a = \frac{2000}{-0{,}5} = -\frac{20000}{5} = -4000$	
Einsetzen in (3):	$5000 = -4000 + c \Leftrightarrow c = 9000$	
Ergebnis:	$x_n = -4000 \cdot 0{,}5^n + 9000$	(8)

Mittels $y_n = 16000 - x_n$

erhält man schneller: $y_n = 15000 - \left(-4000 \cdot 0{,}5^n + 9000\right) = 6000 + 4000 \cdot 0{,}5^n$

d. h. $y_n = -4000 \cdot 0{,}5^n + 6000$ (9)

Die Gleichungen (8) und (9) setzt man wieder zum Verteilungsvektor zusammen:

Folgerung: $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4000 \cdot 0{,}5^n + 9000 \\ 4000 \cdot 0{,}5^n + 6000 \end{pmatrix}$ (10)

Günstig ist die Aufspaltung: $\vec{v}_n = 4000 \cdot 0{,}5^n \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9000 \\ 6000 \end{pmatrix}$ (11)

Für $n \to \infty$ folgt daraus: $\vec{v}_G = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{v}_n = \begin{pmatrix} 9000 \\ 6000 \end{pmatrix}$

denn es ist ja $\lim\limits_{n\to\infty} 0{,}5^n = 0$

Man erkennt, dass für die beiden Komponenten eine Form **begrenzten exponentiellen Wachstums** vorliegt, genauer gesagt, es handelt sich hier bei den x-Werten um die **begrenzte exponentielle Zunahme**, bei den y-Komponenten um eine **begrenzte exponentielle Abnahme.**
Ausgehend vom Startzustand nehmen die Werte in jeder Zeiteinheit um 50% der Differenz zwischen dem Istzustand und dem Grenzwert zu bzw. ab. Dies nennt man das Sättigungsmanko.
Dies ist sehr ausführlich beschrieben im Text 18820 und weiter in 45820.

<u>Beispiel:</u> Beschränkte Zunahme der x-Komponenten

n = 0: $x_0 = 5000$, $x_G = 9000$, Sättigung: $S_x = 9000 - 5000 = 4000$

n = 1 $x_1 = x_G - 0{,}5 \cdot S_x = 9000 - 0{,}5 \cdot 4000 = 9000 - 2000 = 7000$

n = 2: $x_2 = x_G - 0{,}5^2 \cdot S_x = 9000 - 0{,}25 \cdot 4000 = 9000 - 1000 = 8000$

n = 3: $x_3 = x_G - 0{,}5^3 \cdot S_x = 9000 - 0{,}125 \cdot 4000 = 9000 - 500 = 8500$

Beschränkte Abnahme der y-Komponenten

n = 0: $y_0 = 10000$, $y_G = 6000$, Sättigung: $S_y = 10000 - 6000 = 4000$

n = 1 $y_1 = y_G + 0{,}5 \cdot S_y = 6000 + 0{,}5 \cdot 4000 = 6000 + 2000 = 8000$

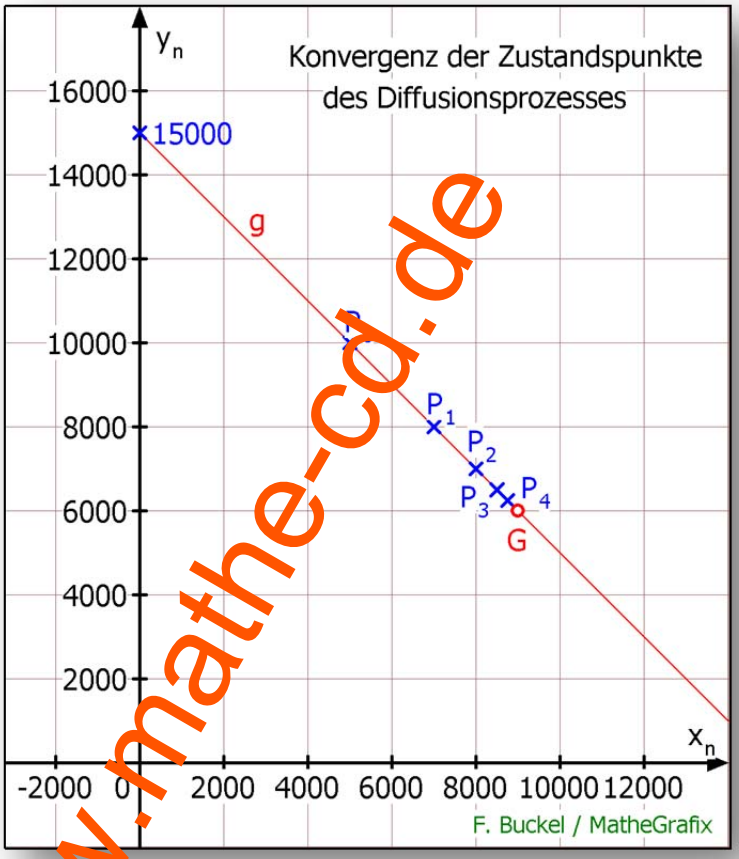
n = 2: $y_2 = y_G - 0{,}5^2 \cdot S_y = 6000 + 0{,}25 \cdot 4000 = 6000 + 1000 = 7000$

n = 3: $y_3 = y_G - 0{,}5^3 \cdot S_y = 6000 + 0{,}125 \cdot 4000 = 6000 + 500 = 6500$

Graphische Darstellung der Zustandspunkte.

Wir haben berechnet (CAS-Screenshot):

$P_0(5000\,|\,10000)$
$P_1(7000\,|\,8000)$
$P_2(8000\,|\,7000)$
$P_3(8500\,|\,6500)$
$P_4(8750\,|\,6250)$
$P_G(9000\,|\,6000)$



Für sie gilt die Bedingung

$x_n + y_n = 15000$ d. h.

$y_n = 15000 - x_n$

d. h. sie liegen auf der Geraden g mit

$y = 15000 - x$

Die Gleichung (11) stellt die Gleichung für die Ortsvektoren dieser Punkte dar:

$$\vec{v}_n = \underbrace{4000 \cdot 0{,}5^n}_{t} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9000 \\ 6000 \end{pmatrix}$$

In der Form $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9000 \\ 6000 \end{pmatrix}$ ist es die Vektorgleichung der Geraden g.

Man erkennt die konvergente Annäherung der Punktfolge P_n an den Grenzpunkt G für $t \to \infty$.

2 Untersuchung der zur Matrix gehörenden Abbildung

Vertieft man die Überlegungen dieser geometrischen Interpretation, kommt man zu interessanten Details.

Die Vektorgleichung $\vec{v}_n = 4000 \cdot 0{,}5^n \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9000 \\ 6000 \end{pmatrix}$ stellt einerseits die explizite Berechnungsformel für Zustandsvektoren zu beliebigen „Zeitpunkten“ n dar.

Andererseits ist sie eine Berechnungsformel für die Ortsvektoren der Zustandspunkte P_n, deren Komponenten eben die Verteilung (Zustände) im Laufe des Diffusionsprozesses darstellen.

Die Übergangsmatrix U gestattet die Berechnung des Folgezustands. Geometrisch bedeutet die Multiplikation $U \cdot \vec{v}_n$ die Berechnung des Ortsvektors zum „Bild“-Punkt P_{n+1}.

Also wird aus dem Punkt P_n ein neuer Punkt P_{n+1} erzeugt. Das nennt man eine **Abbildung** eines Punktes P_n auf einen anderen, der dann dessen Bildpunkt ist, eben P_{n+1}.

Abbildungen sind beispielsweise Verschiebungen, Spiegelungen, Drehungen, Streckungen usw.

Nun wollen wir herausfinden, was für eine Abbildung die Matrix U bewirkt.

Ich schreibe um: $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} 9000 \\ 6000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4000 \\ 4000 \end{pmatrix} \cdot 0{,}5^n$

Wegen $\vec{v}_G = \begin{pmatrix} 9000 \\ 6000 \end{pmatrix}$ folgt: $\vec{v}_n = \vec{v}_G + \begin{pmatrix} -4000 \\ 4000 \end{pmatrix} \cdot 0{,}5^n$

bzw. $\vec{v}_n - \vec{v}_G = \begin{pmatrix} -4000 \\ 4000 \end{pmatrix} \cdot 0{,}5^n$

$\vec{v}_n - \vec{v}_G = \overrightarrow{P_G P_n}$ ersetzen: $\overrightarrow{P_G P_n} = \begin{pmatrix} -4000 \\ 4000 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Beispielwerte:

n = 0: $\overrightarrow{P_G P_0} = \begin{pmatrix} -4000 \\ 4000 \end{pmatrix} \cdot 0{,}5^0 = \begin{pmatrix} -4000 \\ 4000 \end{pmatrix}$

n = 1: $\overrightarrow{P_G P_1} = \begin{pmatrix} -4000 \\ 4000 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} -2000 \\ 2000 \end{pmatrix}$

n = 2: $\overrightarrow{P_G P_2} = \begin{pmatrix} -4000 \\ 4000 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} = \begin{pmatrix} -1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$

n = 3: $\overrightarrow{P_G P_3} = \begin{pmatrix} -4000 \\ 4000 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{8} = \begin{pmatrix} -500 \\ 500 \end{pmatrix}$

Dies heißt: Der Differenzvektor $\overrightarrow{P_G P_n} = \vec{v}_n - \vec{v}_G$ wird mit wachsendem n fortgesetzt halbiert.

d. h. der jeweils nächste Punkt P_n liegt in der Mitte zwischen Vorgänger P_{n-1} und Grenzpunkt G.

Also bewirkt U eine **zentrische Stauchung auf g**, und zwar von G aus mit $k = \frac{1}{2}$.

Dies erkennt man sehr deutlich auf der Abbildung der vorangehenden Seite:

P_1 ist der Mittelpunkt von P_0 und G, P_2 ist der Mittelpunkt von P_1 und G usw.

Die Gerade g bleibt also bei dieser Abbildung erhalten, denn ein Punkt von g hat seinen Bildpunkt wieder auf g. g ist also eine Fixgerade.

Die Eigenschaft, Fixgerade zu sein, kann man rechnerisch so überprüfen:

Urbild g: $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9000 \\ 6000 \end{pmatrix}$

Berechnung der Bildgeraden: $\vec{x}' = U \cdot \vec{x}$

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \left[t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9000 \\ 6000 \end{pmatrix} \right]$$

$$\vec{x}' = t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9000 \\ 6000 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}' = t \cdot \begin{pmatrix} -0{,}8 + 0{,}3 \\ -0{,}2 + 0{,}7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7200 + 1800 \\ 1800 + 4200 \end{pmatrix}$$

Bildgerade g‘: $\vec{x}' = t \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9000 \\ 6000 \end{pmatrix}$

Der Richtungsvektor $\vec{u}' = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ von g‘ ist kollinear zum Richtungsvektor von g: $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

denn es gilt: $\vec{u}' = \frac{1}{2}\vec{u}$. Also sind g‘ und g parallel.

Weil jedoch g‘ hat denselben Aufpunkt $G(9000 \mid 6000)$ wie g hat, sind g und g‘ sogar identisch.

d. h. g ist eine Fixgerade der durch U definierten Abbildung.

Ich nehme diese Situation zum Anlass, weiter zu forschen: Hat diese Abbildung (ich nenne sie α) noch weitere Fixgeraden, und wie kann man sie finden?

Wir verlassen also nun die Einschränkung, die Wirkung der Abbildung nur auf der Geraden g zu untersuchen, was von der Diffusionsaufgabe sinnvoll wäre. Wir verwenden also jetzt für die Abbildung α als „Definitionsbereich“ alle Punkte der x-y-Ebene.
Und wir rechnen mit den Ortsvektoren der Punkte.

Urbild: $P(x \mid y)$ d. h. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Bild: $P'(x' \mid y')$ d. h. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Zusammenhang: $\vec{x}' = U \cdot \vec{x}$

d. h. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

oder: $\begin{Bmatrix} x' = 0{,}8x + 0{,}3y \\ y' = 0{,}2x + 0{,}7y \end{Bmatrix}$

Wir halten gleich fest, dass **der Ursprung** $O(0 \mid 0)$ **Fixpunkt dieser Abbildung** ist, denn setzt man $O(0 \mid 0)$ ein, erhält man $O'(0 \mid 0)$.

Berechnung von Fixgeraden bei einer Abbildung durch eine (2,2)-Matrix U

Eine Gerade ist dann Fixgerade, wenn sie und ihr Bild mindestens einen gemeinsamen Punkt und die gleiche Richtung haben. Der Bildvektor des Richtungsvektors muss also dieselbe Richtung haben wie der ursprüngliche Richtungsvektor, er muss also ein Vielfaches von ihm sein: $\vec{u}' = U \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u}$.

Definition: **Vektoren, die bei Multiplikation mit einer quadratischen Matrix zu einem Vielfachen werden, nennt man <u>Eigenvektoren der Matrix</u>.**

Wenn also $U \cdot \vec{v} = k \cdot \vec{v}$ gilt, dann ist $\vec{v}$ ein <u>Eigenvektor</u> von U mit dem <u>Eigenwert</u> k. Der Nullvektor ist jedoch als Lösung ungeeignet!

Unsere Gerade g mit der Gleichung $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9000 \\ 6000 \end{pmatrix}$ haben wir schon als Fixgerade erkannt.

Ihr Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist also ein Eigenvektor. Seinen Eigenwert k liefert diese Rechnung:

$$\vec{u}' = U \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}8 + 0{,}3 \\ -0{,}2 + 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \cdot \vec{u}$$

Die Matrix $U = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ hat also den Eigenvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit dem Eigenwert 0,5.

Normalerweise kennt man dies alles gar nicht, sondern muss zuerst einmal die Eigenvektoren berechnen. Das geht so:

Bedingung für Eigenvektoren: $\boxed{U \cdot \vec{v} = k \cdot \vec{v}}$

Berechnung von Eigenvektoren:

Fortsetzung auf der Mathe-CD.